Proces decyzyjny:

1. Sformułuj jasno problem decyzyjny.

2. Wylicz wszystkie możliwe **decyzje**.

3. Zidentyfikuj wszystkie możliwe **stany natury**.

4. Określ **wypłatę** dla wszystkich możliwych sytuacji,

   (tzn. kombinacji decyzja / stan natury).

5. Wybierz stosowny model matematyczny problemu decyzyjnego.

6. Zastosuj wybrany model i podejmij decyzję.

Zbiór możliwych decyzji (akcji, alternatyw):

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Zbiór stanów natury (zbiór stanów świata zewnętrznego):

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$$

Wypłata (korzyść):

$$w_{ij} = w(a_i, \theta_j)$$

Tablica wypłat (macierz wypłat):

Decyzje	Stany natury			
	θ_1	θ_2	$\ldots$	θ_m
a_1	w_{11}	w_{12}	$\ldots$	w_{1m}
a_2	w_{21}	w_{22}	$\ldots$	w_{2m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_n	w_{n1}	w_{n2}	$\ldots$	w_{nm}

Przykład

John Thompson zastanawia się, czy zbudować nową fabrykę.

Rozważa trzy możliwości:

1. zbudować dużą fabrykę
2. zbudować małą fabrykę
3. nie budować nowej fabryki.

Pan Thompson zidentyfikował dwa możliwe stany natury:

1. korzystne warunki na rynku (będzie popyt na nowe towary)
2. niekorzystne warunki na rynku (brak popytu).

Pan Thompson oszacował ewentualne korzyści (wypłaty), odpowiadające różnym możliwym sytuacjom:

Decyzje	Stany natury	
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000
Nie budować fabryki	0	0

Strata możliwości

Przy danym stanie natury θ_j strata możliwości związana z decyzją a_i określona jest przez różnicę między maksymalną możliwą wypłatą dla tego stanu natury, a wypłatą w_{ij} odpowiadającą *j*-temu stanowi natury i decyzji a_i.

Ogólnie:

$$s_{ij} = (\max_k w_{kj}) - w_{ij}\,.$$

Przykład

Tablica strat możliwości:

Decyzje	Stany natury	
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)
Zbudować dużą fabrykę	0	180 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	20 000
Nie budować fabryki	200 000	0

Decyzja a_k **dominuje** decyzję a_i (jest nie gorsza od a_i), jeżeli

$$w(a_k,\theta) \geq w(a_i,\theta) \quad \text{dla każdego} \quad \theta \in \Theta.$$

Decyzja a_k **ściśle dominuje** decyzję a_i (jest lepsza od a_i), jeżeli

$$w(a_k,\theta) \geq w(a_i,\theta) \quad \text{dla każdego} \quad \theta \in \Theta$$

oraz

$$w(a_k,\theta') > w(a_i,\theta') \quad \text{dla pewnego} \quad \theta' \in \Theta.$$

Decyzja a_k jest **równoważna** decyzji a_i, jeżeli

$$w(a_k,\theta) = w(a_i,\theta) \quad \text{dla każdego} \quad \theta \in \Theta.$$

Decyzja a_k jest **dopuszczalna**, jeżeli nie istnieje decyzja ściśle ją dominująca.

Decyzja a_k jest **niedopuszczalna**, jeżeli istnieje decyzja ściśle ją dominująca.

Przykład

Decyzje	Stany natury θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5	5	0	4
a_2	3	3	3	3
a_3	0	8	0	0
a_4	3	6	1	2
a_5	2	7	2	2
a_6	3	3	2	1

Decyzja a_2 ściśle dominuje decyzję a_6, a więc decyzja a_6 jest niedopuszczalna.

Decyzje a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 są dopuszczalne.

Podejmowanie decyzji w warunkach pewności

$$\Theta = \{\theta_0\}$$

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna wypłata

Przykład

Decyzje	Stany natury Warunki korzystne ($)
<u>Zbudować dużą fabrykę</u>	**200 000**
Zbudować małą fabrykę	100 000
Nie budować fabryki	0

Stąd decyzja optymalna: zbudować dużą fabrykę.

Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka

Podejmującemu decyzje **znany jest rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury**. Rozkład ten może mieć różną genezę:

- może wynikać z teoretycznych założeń,
- może być rozkładem empirycznym (obserwowanym w przeszłości),
- może wynikać z subiektywnej oceny podejmującego decyzję co do szansy wystąpienia poszczególnych stanów natury.

Kryteria wyboru decyzji optymalnej:

♦ maksymalizacja oczekiwanej wypłaty

♦ minimalizacja oczekiwanej straty możliwości.

Podejmowanie decyzji w warunkach niepewności

Podejmujący decyzję nie dysponuje żadnymi informacjami o prawdopodobieństwie realizacji poszczególnych stanów natury.

Kryteria wyboru decyzji optymalnej:

- kryterium maksymaksowe (Maxmax)
- kryterium maksyminowe (Maxmin)
- kryterium Laplace'a
- kryterium Hurwicza
- kryterium Savage'a (minimaksowe, Minimax).

Kryterium maksymaksowe (Maxmax)

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna wypłata

$$d_{\mathrm{Max\,max}} = \arg\max_i (\max_j w_{ij})$$

(kryterium skrajnie optymistyczne)

Przykład

Decyzje	Stany natury		max
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)	
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000	**200 000**
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	100 000
Nie budować fabryki	0	0	0

Kryterium maksyminowe (Maxmin)

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna z minimalnych wypłat

$$d_{\text{Max min}} = \arg\max_i (\min_j w_{ij})$$

Przykład

Decyzje	Stany natury: Warunki korzystne ($)	Stany natury: Warunki niekorzystne ($)	min
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000	- 180 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	- 20 000
Nie budować fabryki	0	0	**0**

Kryterium Laplace'a

Założenie: wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna oczekiwana wypłata

$$d_L = \arg\max_i \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} \right)$$

Przykład

Decyzje	Stany natury: Warunki korzystne ($)	Stany natury: Warunki niekorzystne ($)	średnia
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000	10 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	**40 000**
Nie budować fabryki	0	0	0

Kryterium Hurwicza

Założenie: podejmujący decyzję określa wartość pewnego współczynnika α (jego "stopień optymizmu"), gdzie $\alpha \in [0,1]$.

Ocena Hurwicza decyzji a_i:

$$H(a_i) = \alpha \cdot (\max_j w_{ij}) + (1 - \alpha) \cdot (\min_j w_{ij})$$

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna ocena Hurwicza

$$d_H = \arg\max_i H(a_i)$$

Przykład

(dla współczynnika $\alpha = 0.8$):

Decyzje	Stany natury		H
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)	
<u>Zbudować dużą fabrykę</u>	200 000	- 180 000	**124 000**
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	76 000
Nie budować fabryki	0	0	0

Kryterium Savage'a (Minimax)

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada minimalna z maksymalnych strat możliwości

$$d_{\text{Min max}} = \arg\min_{i}(\max_{j} s_{ij})$$

Przykład

Decyzje	Stany natury: Warunki korzystne ($)	Stany natury: Warunki niekorzystne ($)	max
Zbudować dużą fabrykę	0	180 000	180 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	20 000	**100 000**
Nie budować fabryki	200 000	0	200 000

Kryterium oczekiwanej wypłaty

Założenie: znany jest rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury, tzn. dla zbioru stanów natury $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ znamy $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$, gdzie

$$p_j = P(\theta_j), \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \qquad 0 \le p_j \le 1 \quad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Oczekiwana wypłata odpowiadająca decyzji a_i (expected monetary value):

$$EMV(a_i) = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} \cdot p_j$$

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada maksymalna oczekiwana wypłata

$$d_{EMV} = \arg\max_i EMV(a_i)$$

Przykład

Załóżmy, że prawdopodobieństwo dużego popytu (korzystne warunki) wynosi 0.6, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia niekorzystnych warunków wynosi 0.4.

Decyzje	Stany natury		*EMV*
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)	
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000	48 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	**52 000**
Nie budować fabryki	0	0	0

Kryterium oczekiwanej starty możliwości

Założenie: znany jest rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury.

Oczekiwana strata możliwości odpowiadająca decyzji a_i (expected opportunity loss):

$$EOL(a_i) = \sum_{j=1}^{m} s_{ij} \cdot p_j$$

Decyzja optymalna = decyzja, której odpowiada minimalna oczekiwana strata możliwości

$$d_{EOL} = \arg\min_i EOL(a_i)$$

Przykład

Decyzje	Stany natury		*EOL*
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)	
Zbudować dużą fabrykę	0	180 000	72 000
<u>Zbudować małą fabrykę</u>	100 000	20 000	**68 000**
Nie budować fabryki	200 000	0	120 000

Przykład

Załóżmy, że prawdopodobieństwo dużego popytu (korzystne warunki) wynosi p, gdzie $p \in [0,1]$, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia niekorzystnych warunków wynosi $1 - p$.

Decyzje	Stany natury: Warunki korzystne	Stany natury: Warunki niekorzystne	*EMV*
Zbudować dużą fabrykę	200 000	- 180 000	$380000p - 180000$
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	$120000p - 20000$
Nie budować fabryki	0	0	0

Zatem

P	Decyzja optymalna
$p < 0.167$	Nie budować fabryki
$0.167 < p < 0.62$	Zbudować małą fabrykę
$p > 0.62$	Zbudować dużą fabrykę

Oczekiwana wypłata
przy wykorzystaniu doskonałej informacji

(expected value with perfect information)

$$EVwPI = \sum_{j=1}^{m} (\max_{k} w_{kj}) \cdot p_j$$

Interpretacja: *EVwPI* = średnia wypłata, której można się spodziewać, gdyby zawsze przed podjęciem decyzji występowała pewność co do wystąpienia konkretnego stanu natury.

Oczekiwana wartość doskonałej informacji

(expected value of perfect information)

$$EVPI = EVwPI - \max_{i} EMV(a_i)$$

Interpretacja: *EVPI* = maksymalna kwota, jaką podejmującemu decyzję opłaca się wydać, aby uzyskać doskonałą informację.

Przykład

Załóżmy, że prawdopodobieństwo dużego popytu (korzystne warunki) wynosi 0.6, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia niekorzystnych warunków wynosi 0.4.

Decyzje	Stany natury		*EMV*
	Warunki korzystne ($)	Warunki niekorzystne ($)	
Zbudować dużą fabrykę	**200 000**	- 180 000	48 000
Zbudować małą fabrykę	100 000	- 20 000	**52 000**
Nie budować fabryki	0	**0**	0

Stąd

$$EVwPI = 0.6 \cdot 200000 + 0.4 \cdot 0 = 120000$$

a zatem

$$EVPI = 120000 - 52000 = 68000 .$$